

Algumas relações entre combinatória e topologia

EBT 2024

Leandro F. Aurichi*

1 Grupo fundamental discretamente

1.1 Um jogo

Começamos com um tabuleiro circular com 4 casas, nomeadas A , B , C e D (veja a Figura 1.1). Vamos dizer que duas casas são adjacentes se elas dividem uma borda (vamos dizer também que uma casa é adjacente a si mesma, para simplificar). Vamos adotar como orientação positiva o seguinte:

$$A < B < C < D < A.$$

Para completar o jogo, tomamos uma corda circular com n nós. Vamos colocar os nós nas casas do tabuleiro e aqui é importante que a distância entre dois nós consecutivos seja menor que a distância entre duas casas não adjacentes. Isso implica que se um nó está numa determinada casa, o próximo nó está numa casa adjacente. Vamos dizer que uma configuração é *válida* quando todos os nós estão seguindo tal regra - veja a Figura 2 para dois exemplos de configurações. Vamos também numerar os nós, começando em 1 e terminando em n , mantendo a regra de que se dois números tem diferença menor ou igual a 1, então seus respectivos nós são adjacentes. Além disso, os nós de números 1 e n também são consecutivos - veja novamente a Figura 2. Muitas vezes faremos o abuso de chamar de $n + 1$ o nó 1.

Um *movimento válido* é a mudança de lugar de um único nó numa configuração válida de forma que, após o movimento, se continue com uma configuração válida (veja a Figura 3).

Vamos dizer que uma configuração é *crescente* se para cada par de nós $(j, j + 1)$, suas respectivas casas estão em ordem crescente (ou são a mesma casa). Veja a Figura 4. Vamos dizer que uma configuração crescente é não trivial se os nós dela ocupam mais de uma casa.

O resultado principal dessa seção é o seguinte:

Teorema 1.1. *Não existe uma sequência de movimentos válidos que comece com a configuração em que todos os nós estão na casa A e termine numa configuração crescente não trivial.*

*A confecção deste minicurso contou com apoio financeiro de projeto regular, processo nº 2023/00595-6, Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP)

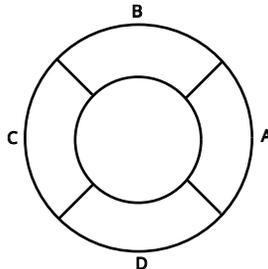


Figura 1: O tabuleiro

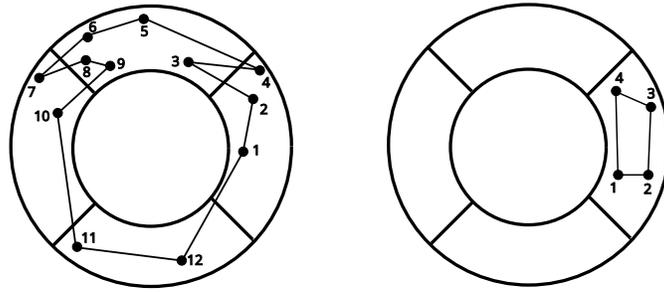


Figura 2: Duas configurações válidas

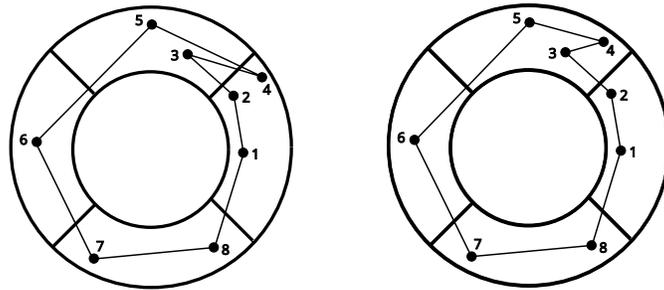


Figura 3: Um movimento válido

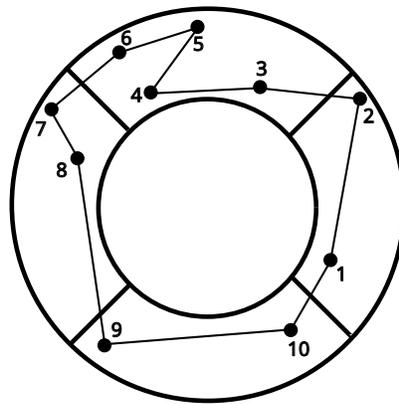


Figura 4: Uma configuração crescente

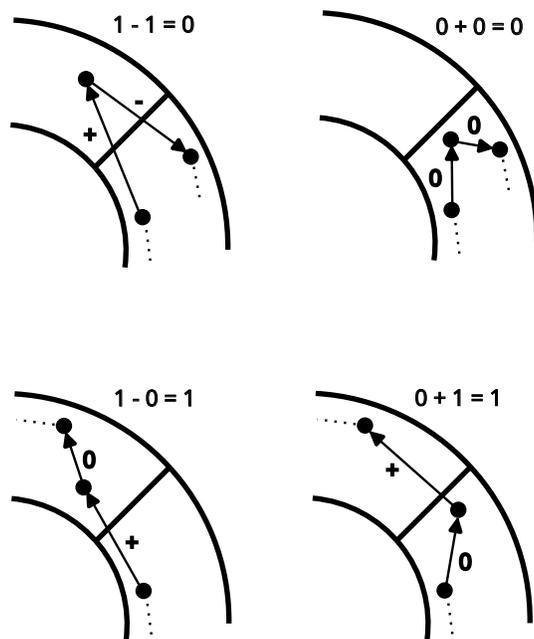


Figura 5: O invariante

Para provar tal teorema, vamos utilizar um invariante: dado um par de nós da forma $(j, j + 1)$, sejam $c(j)$ e $c(j + 1)$ suas respectivas casas. O valor do par $(j, j + 1)$ é definido como:

$$v(j, j + 1) = \begin{cases} -1 & \text{se } c(j + 1) < c(j); \\ 0 & \text{se } c(j) = c(j + 1); \\ 1 & \text{se } c(j) < c(j + 1). \end{cases}$$

Dada uma configuração válida, seu valor é definido como:

$$\sum_{j=1}^n v(j, j + 1).$$

Proposição 1.2. *Se uma configuração é obtida a partir de outra configuração por um movimento válido, seus valores são iguais.*

Demonstração. Só precisamos verificar alguns casos. A Figura 5 apresenta alguns deles. □

Com isso, o resultado principal dessa seção está provado: como a configuração em que todos os nós estão na casa A tem valor 0, é impossível alcançar uma configuração crescente não trivial por movimentos válidos, já que uma configuração assim tem valor estritamente maior que 0.

1.2 A não trivialidade do grupo fundamental do círculo

Agora podemos provar que o grupo fundamental do círculo é não trivial. Vamos fazer isso por contradição. Dessa forma, por toda essa seção, suponha que $H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow S^1$ é uma função contínua tal que

$$H(\cdot, 0) \cong (1, 0)$$

$$H(\theta, 1) = (\cos(2\pi\theta), \text{sen}(2\pi\theta))$$

para todo $\theta \in [0, 1]$.

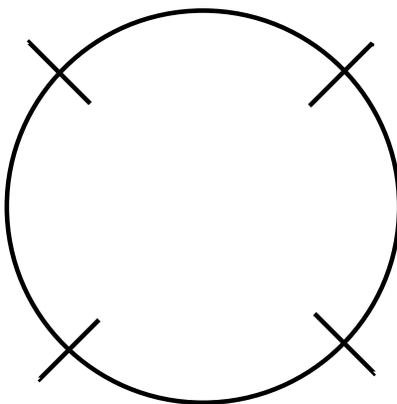


Figura 6: S^1 dividido

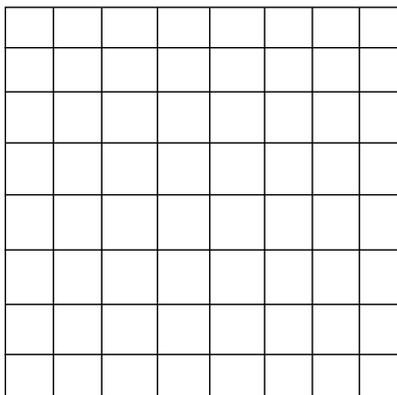


Figura 7: $[0, 1] \times [0, 1]$ como um tabuleiro de xadrez

Divida S^1 em 4 pedaços de mesmo tamanho (veja a Figura 6). Vamos chamar cada pedaço dessa divisão de casa, seguindo a nomenclatura da seção anterior. Considere

$$\varepsilon = \inf\{d(c, x) : c \text{ é o ponto central de uma casa e } x \text{ está em outra casa}\}.$$

Note que $\varepsilon > 0$ e que, em particular, se a e b têm distância entre si menor que ε , então eles estão em casas adjacentes.

Como $[0, 1] \times [0, 1]$ é compacto, H é uniformemente contínua. Logo, existe $\delta > 0$ tal que

$$\text{se } d((\theta, t), (\sigma, s)) < \delta, \text{ então } d(H(\theta, t), H(\sigma, s)) < \varepsilon. \quad (1)$$

Agora vamos dividir $[0, 1] \times [0, 1]$ em quadrados menores, como um tabuleiro de xadrez (veja a Figura 7). Precisamos usar tantos quadrados quanto necessário de forma que o tamanho de cada quadrado seja tão pequeno que, se tomarmos pontos em dois quadrados adjacentes, a distância entre eles é menor do que δ - note que se dois quadrados tiverem algum ponto em comum, eles são considerados adjacentes (veja a Figura 8).

A construção acima nos dá:

Proposição 1.3. *Se X, Y são pontos em quadrados adjacentes em $[0, 1] \times [0, 1]$, então $H(X), H(Y)$ estão em casas adjacentes em S^1 .*

Agora vamos selecionar alguns pontos especiais em $[0, 1] \times [0, 1]$ usando o tabuleiro. Para cada quadrado, selecione um ponto da seguinte forma (veja a Figura 9):

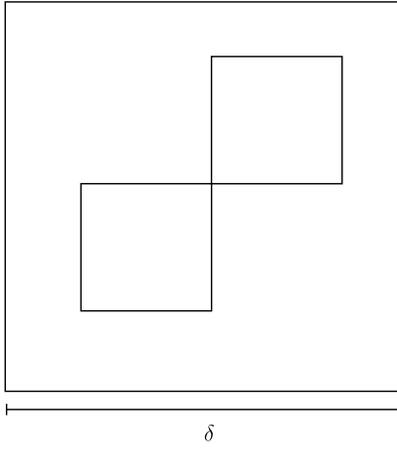


Figura 8: Quadrados adjacentes precisam ter diâmetro menor do que δ no total

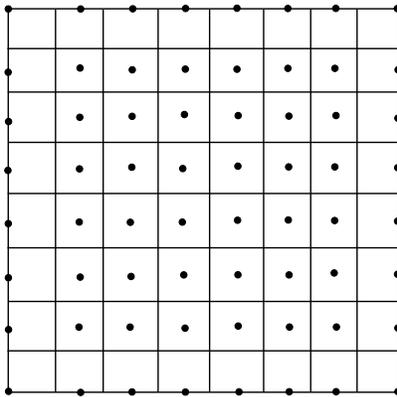


Figura 9: Pontos selecionados no tabuleiro

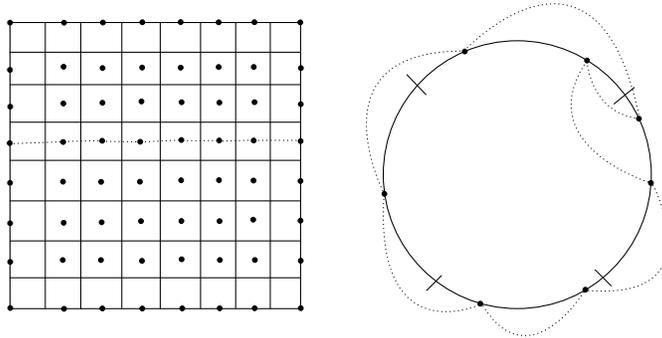


Figura 10: A linha à esquerda induz uma configuração à direita

- se o quadrado é um dos 4 cantos de $[0, 1] \times [0, 1]$, selecione o ponto do canto, isto é, selecione o ponto $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 0)$ ou $(1, 1)$ se possível;
- se o quadrado está na borda de $[0, 1] \times [0, 1]$, mas não num canto, selecione o ponto central do quadrado em sua borda. Por exemplo, se é um dos quadrados da linha de baixo, selecione o ponto $(x, 0)$, onde $(x, 0)$ é o ponto central entre os dois vértices de baixo do quadrado;
- se o quadrado está no interior de $[0, 1] \times [0, 1]$, selecione seu ponto central.

Escolha dois quadrados adjacentes em $[0, 1] \times [0, 1]$. Note que a imagem por H dos pontos selecionados em tais quadrados estão em casas adjacentes em S^1 pelo resultado anterior. Assim, se olharmos para os pontos selecionados em qualquer linha de quadrado, eles induzem uma configuração válida em S^1 - veja a Figura 10. Note que os pontos mais à esquerda e mais à direita têm a mesma imagem.

Note que a configuração induzida pela linha de cima é constante. Já a configuração induzida pela linha de baixo é crescente. Vamos ver que tal configuração passa por todas as casas. Tome o ponto c central de uma casa. Existe um ponto da forma $(x, 0)$ tal que $H(x, 0) = c$. Seja p o ponto selecionado do mesmo quadrado em que está $(x, 0)$. Em particular, $d(p, (x, 0)) < \delta$. Assim, p é um ponto selecionado cuja imagem está na mesma casa que c .

Começando da linha de baixo, escolha um dos quadrados e o substitua pelo quadrado imediatamente acima (veja a Figura 11). Note que esse novo conjunto é novamente uma configuração válida (já que os quadrados são adjacentes). Como sua diferença é de, no máximo, um nó para a configuração anterior, isso é um movimento válido no jogo. Note que a mesma ideia pode ser aplicada a qualquer outro quadrado e repetida até que atinjamos a segunda linha. Então podemos repetir os passos e alcançar a terceira linha e assim por diante. Com isso, encontramos uma lista de movimentos que ligam uma configuração crescente não trivial a uma configuração constante, o que é uma contradição.

Observações

Boa parte do que foi apresentado aqui foi fruto de eu querer encontrar uma prova para a não trivialidade do grupo fundamental do círculo que “se encaixasse bem” num curso de topologia geral. Colaborou bastante nisso Lucas Silva Sinzato Real, que na época era meu aluno de iniciação científica. Note que o que foi apresentado aqui apenas mostra a não trivialidade do grupo, sem calculá-lo. Mas, num curso de topologia geral, isso é de alguma forma suficiente, já que apenas com isso já é possível, por exemplo, provar que o plano e o plano menos um ponto não são homeomorfos. Por outro lado, é possível se esforçar um pouco mais e desenvolver a técnica aqui apresentada e obter o cálculo completo do grupo (mas, até onde eu vejo, para essa parte será necessário sujar um pouco mais as mãos do que até onde se foi aqui).

Cabe dizer também que, depois de conseguir a prova aqui apresentada, eu me deparei com esse post:

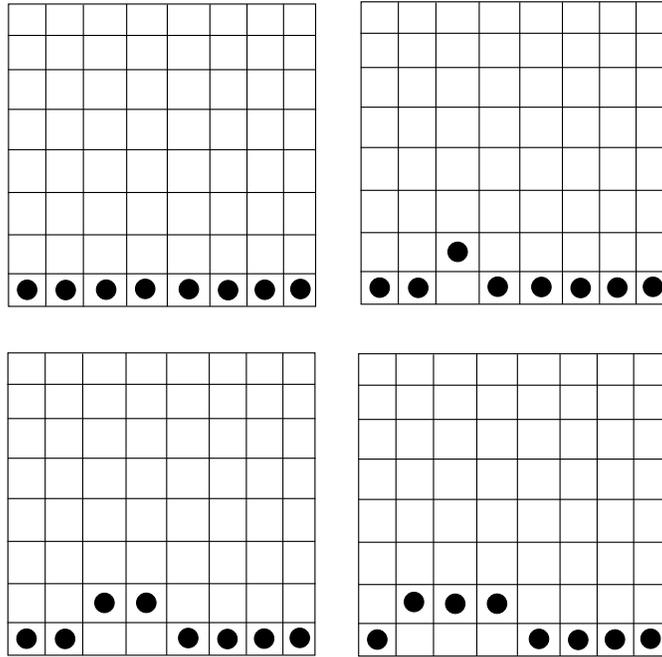


Figura 11: Selecionando quadrados e subindo



onde essencialmente a mesma ideia é apresentada (no momento em que escrevo, a ideia aparece como a segunda resposta).

2 Um pouco de grafos

Chamos de *grafo* G um par (V_G, A_G) , onde V_G é um conjunto, cujos elementos chamamos de *vértices* e A_G é um conjunto de pares não ordenados de vértices¹, chamados de *arestas*.

Se dois vértices a, b são tais que $\{a, b\}$ é uma aresta (usualmente denotada por ab), dizemos que eles são *adjacentes*. A quantidade de vértices adjacentes a um vértice a fixado é chamada de *grau* de a . Um *caminho* é uma sequência de vértices a_1, a_2, \dots, a_n , com todos os a_i 's distintos entre si e de forma que a_i e a_{i+1} sejam adjacentes para todo i . Um *ciclo* é o mesmo que um caminho, com a diferença que $a_1 = a_n$. Um grafo é dito *conexo* se para quaisquer dois vértices dele existe um caminho entre eles.

Uma *árvore* é simplesmente um grafo conexo sem ciclos. Dizemos que uma árvore bifurca finitamente se todo vértice dela tem grau finito. Um resultado que utilizaremos algumas vezes é o seguinte:

Teorema 2.1 (Lema de König). *Se T é uma árvore infinita que bifurca finitamente, T admite um caminho infinito.*

Demonstração. Fixe v_0 um vértice qualquer. Como a árvore é infinita (e conexa), existem infinitos caminhos começando em v_0 . Como v_0 possui apenas finitos vizinhos, existe v_1 , vizinho de v_0 tal que existem infinitos caminhos começando com v_0v_1 . Como v_1 também tem grau finito, existe v_2 vizinho de v_1 com infinitos caminhos começando com $v_0v_1v_2$. Procedendo desta forma, construímos o caminho $v_0v_1 \cdots v_n \cdots$ como desejado. \square

¹Pode-se trabalhar também com pares ordenados, mas não faremos isso aqui.

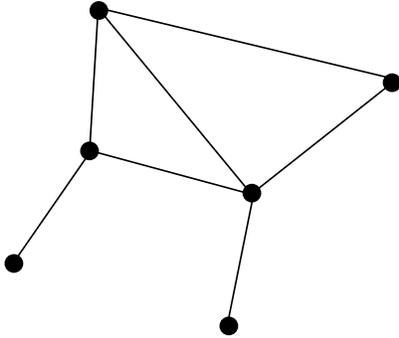


Figura 12: Representamos uma aresta por uma linha conectando os vértices

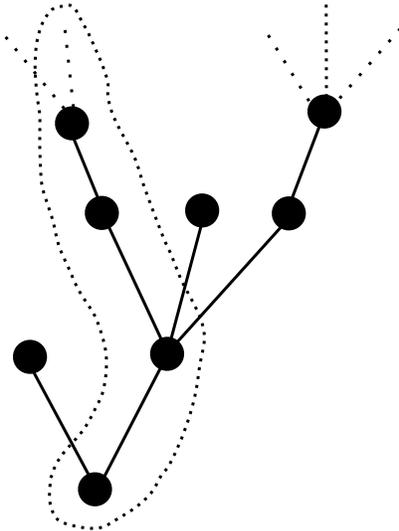


Figura 13: Encontrando um caminho infinito

Dado n , chamamos de K_n o *grafo completo* de n vértices. Ou seja, o grafo que possui n vértices e todas os pares de vértices como arestas. De forma análoga, definimos K_ω o grafo completo com enumeráveis vértices.

Dado G grafo, chamamos de uma *coloração* uma função $f : A_G \rightarrow \{1, \dots, n\}$ (cada i é chamado de uma cor²). Dado um grafo completo G e uma coloração sobre ele, dizemos que $H \subset V_G$ é homogêneo se todas as arestas entre vértices de H possuem a mesma cor.

Pelo princípio da casa dos pombos, é claro que se usarmos finitas cores para pintar um grafo com infinitas arestas, haverá uma cor utilizada em infinitas arestas. Em grafos completos, pode-se afirmar muito mais que isso:

Teorema 2.2 (Ramsey (versão infinita)). *Seja f uma coloração finita sobre K_ω . Então existe H infinito homogêneo em K_ω .*

Demonstração. Sem perda de generalidade, podemos supor que os vértices de K_ω são os elementos de \mathbb{N} . Considere $n_0 = 0$. Como n_0 tem infinitas arestas incidindo sobre si, existe uma cor c_0 tal que infinitas arestas incidindo sobre n_0 possuem cor c_0 . Chame de A_0 o conjunto de vértices que são as outras pontas de tais arestas. Seja n_1 o mínimo de A_0 . Como n_1 tem infinitos vizinhos dentro de A_0 , existe uma cor c_1 tal que infinitos vizinhos de n_1 em A_0 tem a aresta correspondente de cor c_1 . Chame de A_1 o conjunto de tais vértices. Seja n_2 o mínimo de A_1 . Defina c_2 e A_2 de forma análoga e continue com o mesmo padrão para todo $k \in \mathbb{N}$.

Seja c uma cor tal que o conjunto dos c_i 's tais que $c_i = c$ seja infinito. Defina

$$H = \{n_k : c_k = c\}.$$

Note que H satisfaz o desejado. □

Como aplicação, podemos provar de maneira bastante simples uma generalização de um resultado normalmente visto em cursos de análise real:

Teorema 2.3. *Seja (X, \leq) conjunto totalmente ordenado³. Seja $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sequência de pontos de X . Então existe uma subsequência estritamente crescente, ou existe uma subsequência estritamente decrescente ou então existe uma subsequência constante (estamos considerando apenas subsequências infinitas).*

Demonstração. Considere o grafo completo onde cada vértice é um número natural. Dados $n < k$, com $n, k \in \mathbb{N}$, definimos a seguinte cor sobre a aresta nk :

$$c(nk) = \begin{cases} 0 & \text{se } x_n = x_k \\ 1 & \text{se } x_n < x_k \\ 2 & \text{se } x_n > x_k \end{cases}$$

Seja H subconjunto homogêneo infinito. Note que a subsequência formada pelos elementos de H tem a propriedade desejada. □

Uma segunda aplicação é a versão finita do próprio Teorema de Ramsey:

Teorema 2.4 (de Ramsey (versão finita)). *Sejam $r, s \in \mathbb{N}$. Então existe $n \in \mathbb{N}$ tal que toda coloração com r cores sobre K_n admite um conjunto H com s elementos homogêneo.*

Demonstração. Suponha que o resultado não vale. Considere o grafo onde cada vértice é uma coloração com r cores sobre K_n (variando todos os n 's e todas as colorações). Suponha cada K_n com vértices enumerados de 0 a $n - 1$. Coloque uma aresta entre dois vértices da forma $(K_n, c), (K_{n'}, c')$ se $n' = n + 1$ e c' é uma extensão de c . Note que tal grafo é uma árvore infinita e localmente finita. Logo, pelo Lema de König, existe um ramo infinito. Note que tal ramo infinito induz uma coloração sobre todo \mathbb{N} sem um conjunto de tamanho s homogêneo, contrariando a versão infinita do Teorema de Ramsey. □

²Também se pode usar infinitas cores ou então se colorir vértices em vez de arestas. Não faremos nenhuma das duas coisas aqui.

³Por exemplo, \mathbb{R} com a ordem usual.

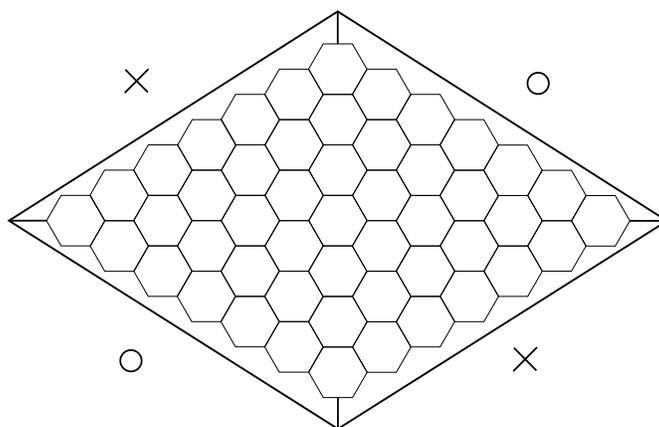


Figura 14: O tabuleiro de Hex

Observações

Essa é a seção com mais combinatória e com menos topologia. Na verdade, a única “topologia” apresentada é o resultado sobre subsequências monótonas. Mas eu acredito que esse é um exemplo bastante explícito de como a combinatória pode ficar escondida quando estamos trabalhando numa estrutura rica.

O Lema de König aqui apresentado terá uma aplicação topológica não trivial na última seção. Já o Teorema de Ramsey, além de ser aplicado em diversos contextos, também inspira caminhos de trabalho. Para quem quiser ver uma forma bem topológica, há por exemplo alguns aqui:



Finalmente, na demonstração apresentada aqui da versão finita do Teorema de Ramsey, não há qualquer estimativa de quão grande precisa ser o valor n uma vez fixados r, s . Na verdade, encontrar o menor n que satisfaz tal condição é um problema em aberto, mesmo quando fixamos $r = 2$ (o mais simples possível). Por exemplo, sabe-se nessa situação que $n = 6$, quando $s = 3$ e que $n = 18$ quando $s = 4$. Já quando $n = 5$, só se sabe atualmente que s está entre 43 e 48.

3 Teorema do ponto Fixo de Brower

3.1 O jogo Hex

Novamente, teremos um jogo para nos ajudar na parte combinatória. Considere o seguinte tabuleiro (veja a Figura 14):

Esse jogo é jogado entre duas pessoas: X e O. As duas pessoas se alternam colocando peças no tabuleiro, onde elas quiserem, desde que as casas estejam desocupadas. As peças de X são marcadas com X, e as de O são marcadas com O. Vence quem conseguir conectar seus lados (note na figura que há dois pares de lados demarcados).

Esse é um jogo que, de fato, é interessante de ser jogado. Há bastante coisa provada sobre ele mas aqui vamos nos concentrar num único fato:

Teorema 3.1 (Fundamental do Hex). *Se preenchermos completamente um tabuleiro de Hex com peças marcadas com X e O haverá um par de lados conectado.*

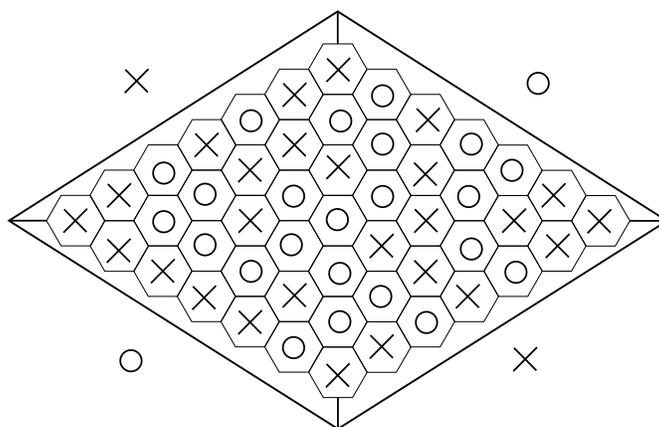


Figura 15: Um tabuleiro completamente preenchido

Em particular, o teorema acima diz que o jogo Hex não admite empates (alguém será a primeira pessoa a conectar seus dois lados). Na verdade, o teorema é um tanto mais forte: a gente nem está supondo que a quantidade de peças está balanceada - pode haver muito mais peças de uma pessoa do que da outra.

Como dito, há mais coisas interessantes que podem ser provadas sobre tal jogo. Por exemplo, que existe uma estratégia vencedora para quem começa a jogar. O mais curioso disso é que se sabe que tal estratégia existe, mas ela não é conhecida (além de em alguns casos de tabuleiros pequenos). De qualquer forma, não vamos usar tal resultado aqui, então passemos à demonstração do Teorema Fundamental:

Demonstração. (do Teorema Fundamental do Hex) Suponha um tabuleiro completamente preenchido (por exemplo, veja a Figura 15). Vamos definir um grafo que vai nos ajudar na argumentação. Os vértices do grafo estarão nos vértices dos hexágonos do tabuleiro, mais os 4 pontos externos (o ponto mais à esquerda, o mais à direita, o mais abaixo e o mais acima). As arestas estarão sobre os lados dos hexágonos, mais as 4 linhas que ligam os pontos extremos aos respectivos hexágonos mais próximos. Esses são os vértices e arestas possíveis no nosso grafo. Vamos agora tomar de fato quem é o grafo. Começamos tomando o ponto mais à esquerda. Tomamos a única aresta incidente a ele, chegando a um novo vértice. Note que, se você estivesse caminhando sobre essa aresta, saindo do ponto externo ao hexágono, você teria uma região X à sua esquerda e uma região O à sua direita. Já quando estamos no segundo vértice, há uma, e só uma, aresta com essa mesma propriedade: uma aresta que caminhando do vértice velho ao novo, deixa uma região com X à esquerda e uma com O à direita. E isso sempre sempre ocorre (veja a Figura 16) se chegamos a um vértice que não é um dos 4 extremos. Analisando os mesmos casos, note que, fora eventuais vértices extremos, todo vértice possui exatamente duas arestas incidentes. Ou seja, esse caminho que começamos no ponto mais à esquerda não termina em qualquer vértice dentro do tabuleiro e também não pode repetir vértices (se chegássemos novamente a um vértice já visitado, haveria mais que duas arestas incidentes nele). Como o tabuleiro é finito, é necessário que tal caminho termine em algum outro ponto externo. Pela questão de mantermos sempre o lado X à esquerda, tal ponto não pode ser o mais à direita (nele a região X está à direita da aresta). Sobrando só os pontos mais acima e mais abaixo. Note que se é o ponto mais acima que pertence ao caminho, as peças marcadas com um O que acompanham o caminho formam uma conexão entre os lados O's. Por outro lado, se é o ponto mais abaixo, então temos que as peças marcadas com X formam uma conexão entre seus lados. Em ambos os casos, encontramos a conexão desejada.

□

3.2 Uma pequena alteração no tabuleiro

O tabuleiro hexagonal é mais prático para ser jogado na vida real. Para a nossa aplicação, é mais conveniente trabalhar com um tabuleiro quadrado. Para ficarmos com um jogo equivalente, podemos

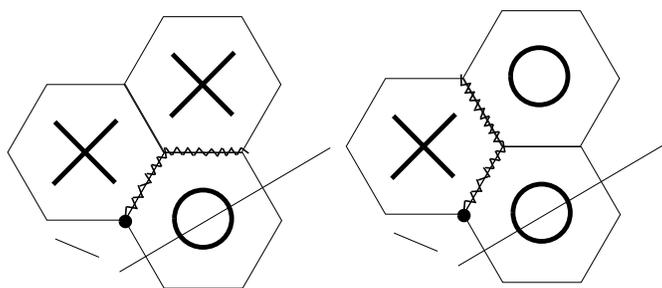


Figura 16: O ponto indica onde o caminho “entrou”. Note que só há uma maneira de continuar em ambos os casos possíveis (caminho em zig-zag)

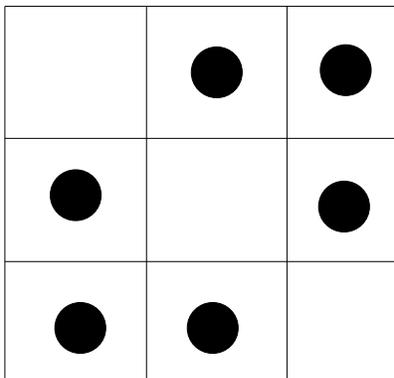


Figura 17: As casas marcadas são as que são adjacentes à casa central - ou seja, duas ficam de fora.

tomar um tabuleiro quadriculado como o de xadrez, mas definimos que duas casas são adjacentes se elas dividem um lado ou se os pontos direito superior de uma delas é o mesmo que o inferior esquerdo da outra (ou seja, na diagonal, só uma das configurações dá adjacência, veja a Figura 17).

Gaste um momento para se convencer que esse jogo é na prática o mesmo que o apresentado antes e que, portanto, vale o Teorema Fundamental.

3.3 O ponto fixo de Brouwer

Agora temos todas as ferramentas para provar o nosso resultado principal:

Teorema 3.2 (Ponto fixo de Brouwer). *Seja $F : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1] \times [0, 1]$ contínua. Então f admite um ponto fixo.*

Demonstração. Para facilitar as contas, vamos adotar sobre \mathbb{R}^2 a norma

$$\|(x, y)\| = \max\{|x|, |y|\}$$

para qualquer $x, y \in [0, 1]$. Como tal norma gera a mesma topologia que a usual, não há perda nisso.

Suponha que não vale o resultado. Por compacidade, existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$\|f(x) - x\| > \varepsilon$$

para todo x . Novamente pela compacidade, temos que f é uniformemente contínua. Assim, existe $\delta > 0$ tal que, para todo $x, y \in [0, 1] \times [0, 1]$ se

$$\text{se } \|x - y\| < \delta \text{ então } \|f(x) - f(y)\| < \varepsilon.$$

Fazemos então uma divisão de $[0, 1] \times [0, 1]$ em quadrados de forma que os centros de quadrados adjacentes distem menos que δ . Também podemos supor δ pequeno suficiente de forma que cada quadrado tenha diâmetro menor que ε . Vamos agora atribuir uma cor entre 4 para cada quadrado. Dado um quadrado qualquer, fixe c seu centro. Vamos analisar o que ocorre com $f(c)$. Vamos adotar a convenção que, se $p \in [0, 1] \times [0, 1]$, p_x é sua primeira coordenada, enquanto que p_y é a sua segunda. Temos 4 casos⁴:

- Se $f(c)_x - c_x > \varepsilon$, atribuímos a cor H^+ ;
- Se $c_x - f(c)_x > \varepsilon$, atribuímos a cor H^- ;
- Se o quadrado ainda não recebeu cor e $f(c)_y - c_y > \varepsilon$, atribuímos a cor V^+ ;
- Se o quadrado ainda não recebeu cor e $c_y - f(c)_y > \varepsilon$, atribuímos a cor V^- .

Note que, pela escolha de ε , cada quadrado recebe uma cor (já que a imagem de $f(c)$ tem que distar pelo menos ε de c). Vamos ver $[0, 1] \times [0, 1]$ como um tabuleiro de Hex, com as bordas da esquerda e da direita com cor H e as bordas de cima e de baixo com cor V (veja a Figura 18). Temporariamente, vamos considerar as casas do tabuleiro coloridas com apenas duas cores: considere H^+ e H^- como uma única cor H , assim como V^+ e V^- como V . Pelo Teorema Fundamental do Hex, existe uma conexão entre lados opostos. Sem perda de generalidade, vamos analisar o caso em que tais lados são os coloridos por V . Voltando à coloração original, note que nenhuma casa da linha superior pode ter recebido a cor V^+ , assim como nenhuma casa da linha inferior pode ter recebido a cor V^- . Assim, a conexão entre os lados de cor V usa casas coloridas tanto por V^+ como por V^- . Com isso, podemos concluir que há uma casa de cor V^+ adjacente a uma casa de cor V^- . Sejam c^+ e c^- seus respectivos centros. Note que

$$\|c^+ - c^-\| < \delta$$

já que c^+ e c^- são centros de casas adjacentes. Assim, pela escolha de δ ,

$$\|f(c^+) - f(c^-)\| < \varepsilon.$$

Mas, pela definição de V^+ e V^- , $\|c^+ - c^-\| > \varepsilon$, contradição. □

Observações

O jogo Hex é tão natural que foi “inventado” pelo menos duas vezes de forma independente. Para um pouco da história e alguns resultados básicos, você pode olhar aqui:



Aqui utilizamos como Teorema Fundamental que o Hex sempre é vencido por alguém. Na verdade, pode-se provar ainda mais: não só alguém vence, como só uma pessoa vence - isto é, nós utilizamos o fato que sempre dois lados terminam por estar conectados. O que se pode mostrar além disso é que se um par for conectado, o outro não será. Aqui apresentamos a relação entre a primeira versão e o Teorema do ponto fixo de Brouwer. A segunda versão também é relacionada a um teorema conhecido: o Teorema da curva fechada de Jordan. Com a segunda versão, pode-se mostrar que se duas curvas contínuas com imagens em $[0, 1] \times [0, 1]$ são tais que uma conecta os lados opostos verticais e a outra conecta os lados opostos horizontais, então elas se cruzam em algum ponto. A partir daí, pode-se provar o Teorema da curva fechada de Jordan com alguns truques:

⁴ H^+ quer dizer que o ponto foi levado para direita, H^- quer dizer que o ponto foi levado para a esquerda. Entre os que não foram levados nem para direita nem para esquerda, colorimos de V^+ os que foram para cima e, finalmente, de V^- os que foram para baixo.

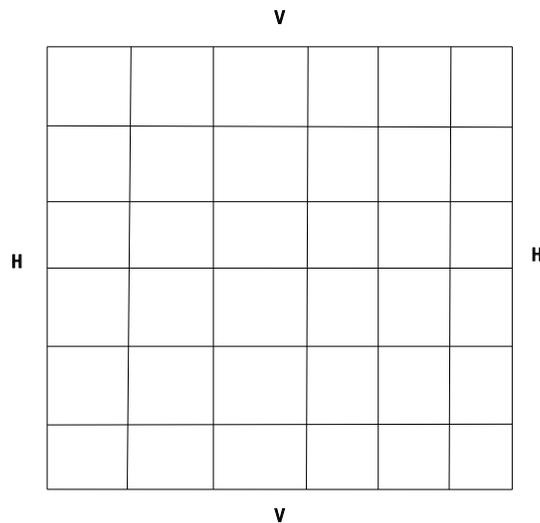


Figura 18: Lados a serem conectados



O que foi apresentado aqui foi principalmente baseado no link abaixo. Lá também é possível ver mais resultados sobre o jogo Hex e sua história.



4 Espaços completamente metrizáveis ludicamente

4.1 Motivação e um resultado necessário

Se considerarmos o conjunto $]0, 1[$ com a métrica usual, ele não é completo - afinal, há sequências de Cauchy de pontos de $]0, 1[$ que convergem para 1. Mas existe uma outra métrica sobre $]0, 1[$ equivalente à usual⁵ que é completa. Nesse caso particular, é fácil ver isso, bastando notar que $]0, 1[$ é homeomorfo a \mathbb{R} , que é completo. No fundo, o que ocorre aqui é que as sequências de Cauchy que contrariavam a completude na métrica usual deixam de ser de Cauchy na nova métrica - note que é isso que precisa ocorrer, já que ser convergente ou não é uma propriedade topológica, portanto invariante entre essas métricas. Do ponto de vista topológico, há um critério simples para sabermos quando uma métrica assim pode ser encontrada:

Teorema 4.1. *Seja X um espaço métrico completo. Se $Y \subset X$ é um G_δ (isto é, uma intersecção enumerável de abertos), então existe uma métrica completa sobre Y equivalente à métrica herdada de X .*

Como todo espaço métrico admite um completamento, o resultado anterior nos dá:

Corolário 4.2. *Dado X um espaço métrico se X é um G_δ em seu completamento, X admite uma métrica completa equivalente à original.*

⁵Isto é, que gera a mesma topologia.

Note que esse critério cobre o exemplo apresentado: $]0, 1[$ é um aberto (e, portanto, um G_δ) em seu complemento $[0, 1]$. O caminho apresentado aqui é mais topológico do que métrico: encontramos quais seqüências de Cauchy poderiam ser “desconsideradas” ao se encontrar uma nova métrica (mantendo a topologia) que as tornam não de Cauchy. O que vamos apresentar na próxima seção é uma maneira de tentar ver isso sem passar pelo argumento topológico.

4.2 Um jogo

Considere o seguinte jogo:

Definição 4.3. Seja (X, d) um espaço métrico. Chamamos de *jogo de Cauchy* o jogo entre ALICE e BETO onde ALICE começa escolhendo $x_0 \in X$ e BETO escolhe $\varepsilon_0 \in \mathbb{R}_{>0}$. Daí, em cada rodada $n + 1$,

- ALICE escolhe x_{n+1} de forma que $d(x_n, x_{n+1}) < \varepsilon_n$;
- BETO escolhe $\varepsilon_{n+1} \in \mathbb{R}_{>0}$.

BETO é dito o vencedor se a seqüência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é convergente. ALICE é a vencedora caso contrário.

Intuitivamente, a diferença entre simplesmente falar que a seqüência escolhida por ALICE é de Cauchy é a velocidade em que a distância entre os pontos vai para 0: numa seqüência de Cauchy, basta dizer que a seqüência entre os pontos vai para 0, no jogo, BETO pode exigir uma velocidade maior, conforme os pontos escolhidos por ALICE.

Antes de passarmos ao resultado principal, vejamos alguns exemplos que ilustram o comportamento de tal jogo:

Exemplo 4.4. Se (X, d) é completo, então BETO possui uma estratégia vencedora. Note que, nesse caso, basta que BETO garanta que a seqüência escolhida por ALICE seja de Cauchy. Ele pode, por exemplo, tomar $\varepsilon_n = \frac{1}{2^n}$ a cada rodada.

Exemplo 4.5. BETO tem uma estratégia vencedora em $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ (apesar de tal espaço não ser completo). O truque aqui é, além de obrigar a seqüência de pontos escolhida por ALICE ser de Cauchy, fazer com que ela fique “longe” de pontos racionais. Fixe $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma enumeração para \mathbb{Q} . Vamos definir uma estratégia para BETO. Dado x_0 jogado por ALICE na rodada 0, escolha $\varepsilon_0 < \frac{1}{2^0}$ (para que a seqüência seja de Cauchy) e de forma que

$$q_0 \notin \overline{B_{\varepsilon_0}(x_0)}$$

(para “fugir” de q_0). Depois, a cada rodada $n + 1$, sendo x_0, \dots, x_{n+1} as escolhas de ALICE até o momento, jogamos ε_{n+1} de forma que $\varepsilon_{n+1} < \frac{1}{2^{n+1}}$ (para que a seqüência seja de Cauchy), $\overline{B_{\varepsilon_{n+1}}(x_{n+1})} \subset B_{\varepsilon_n}(x_n)$ e

$$q_0, \dots, q_{n+1} \notin \overline{B_{\varepsilon_{n+1}}(x_{n+1})}$$

(para “fugir” de q_0, \dots, q_{n+1}).

Note que procedendo assim, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma seqüência de Cauchy e, portanto, convergente em \mathbb{R} . Mas note também que $q_n \notin \overline{\{x_k : k \geq n\}}$ para todo n . Assim, o limite em \mathbb{R} de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ não é racional. Ou seja, a seqüência é convergente em $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ como desejado.

4.3 Um jogo auxiliar

Para provarmos o resultado principal dessa seção, é conveniente o uso de um jogo auxiliar:

Definição 4.6. Chamamos de *jogo de Cauchy** sobre um espaço X o seguinte jogo entre ALICE e BETO. ALICE escolhe \mathcal{C}_0 uma cobertura aberta para X . Então BETO escolhe $C_0 \in \mathcal{C}_0$. Numa rodada $n + 1$, ALICE escolhe \mathcal{C}_{n+1} cobertura aberta para C_n e então BETO escolhe $C_{n+1} \in \mathcal{C}_{n+1}$. No final, ALICE é declarada a vencedora se qualquer seqüência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de pontos tais que cada $x_n \in C_n$ é convergente. BETO é o vencedor caso contrário.

Pode-se mostrar que os jogos de Cauchy e de Cauchy* são *duais*: ALICE tem estratégia vencedora num dos jogos se, e somente, BETO tem estratégia vencedora no outro. Para o que vamos precisar aqui, só precisamos provar uma dessas 4 implicações:

Proposição 4.7. *Seja (X, d) espaço métrico tal que BETO admite estratégia vencedora no jogo de Cauchy. Então ALICE admite estratégia vencedora no jogo de Cauchy*.*

Demonstração. Vamos chamar de σ a estratégia vencedora de BETO no jogo de Cauchy. Podemos ver σ como uma função que atribui a cada sequência de pontos⁶ de X (o histórico da partida) um valor real positivo (que seria o valor jogado por BETO naquela rodada). Sem perda de generalidade, podemos supor que, se

$$(a_0, \sigma(a_0), a_1, \sigma(a_0, a_1), a_2, \dots)$$

é uma partida do jogo de Cauchy em que BETO seguiu a estratégia σ , então $(\sigma(a_0, \dots, a_n))_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência que converge para 0.

De posse de σ , vamos definir uma estratégia para ALICE no jogo de Cauchy*. Note que

$$\mathcal{C}_0 = \{B_{\sigma(x)}(x) : x \in X\}$$

é uma cobertura aberta⁷ para X . Assim, ALICE começa jogando \mathcal{C}_0 no jogo de Cauchy*. Seja $C_0 = B_{\sigma(x_0)}(x_0)$ a resposta de BETO. Note que

$$\mathcal{C}_1 = \{B_{\sigma(x_0, x)}(x) \in B_{\sigma(x_0)}(x_0)\}$$

é uma cobertura⁸ aberta para C_0 . Seja $C_1 = B_{\sigma(x_0, x_1)}(x_1)$ a escolha de BETO. Continuando assim, obtemos o que ALICE deve jogar em cada rodada do jogo de Cauchy*. Ou seja, a estratégia está definida. Resta mostrar que é vencedora.

Fixe uma partida do jogo de Cauchy* em que foi utilizada a estratégia acima. Seja $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ a sequência de pontos induzida pela definição da estratégia. Note que

$$(x_0, \sigma(x_0), x_1, \sigma(x_0, x_1), x_2, \dots)$$

é uma partida do jogo de Cauchy em que BETO seguiu a estratégia σ . Como σ é vencedora, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é convergente. Com isso, mais o fato que $(\sigma(x_0, \dots, x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge para 0, pode-se mostrar que qualquer sequência $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que cada

$$y_n \in B_{\sigma(x_0, \dots, x_n)}(x_n)$$

é convergente. Ou seja, ALICE vence a partida. □

Antes de prosseguirmos, uma observação que nos será bastante útil. Todo espaço métrico é paracompacto. Ou seja, dada uma cobertura aberta \mathcal{C} , existe uma segunda cobertura \mathcal{C}' tal que cada aberto de \mathcal{C}' está contido em algum aberto de \mathcal{C} (isto é, \mathcal{C}' é um refinamento de \mathcal{C}) e tal que todo ponto x está em algum aberto que intercepta apenas finitos abertos de \mathcal{C}' . Em particular, \mathcal{C}' é ponto-finita: cada ponto está em apenas finitos abertos de \mathcal{C}' . Finalmente, note que se ALICE admite uma estratégia vencedora, ALICE tem uma estratégia vencedora tal que todas as coberturas jogadas são ponto-finitas, já que “passar a um refinamento” não atrapalha ALICE.

O resultado que nos será útil é:

Proposição 4.8. *Seja (X, d) espaço métrico e seja Y o complemento de X . Se ALICE tem estratégia vencedora no jogo de Cauchy*, então X é um G_δ em Y .*

⁶Formalmente o domínio não são todas as sequências possíveis, só as que vêm de uma partida seguindo as regras do jogo.

⁷Aqui estamos usando todas as respostas possíveis por σ na rodada 0.

⁸Aqui estamos usando todas as respostas possíveis por σ na rodada 1, depois de x_0 ter sido jogado na rodada 0 por ALICE e $\sigma(x_0)$ ter sido jogado por BETO.

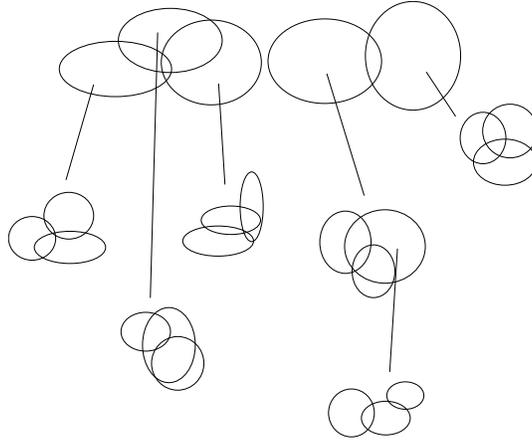


Figura 19: A cada aberto é associada uma cobertura para si mesmo

Demonstração. Seja σ uma estratégia vencedora de ALICE. Sem perda de generalidade, podemos supor que cada aberto jogado por σ é um aberto em Y . Além disso, pela observação acima, podemos supor que cada cobertura jogada por σ é ponto-finita. Considere⁹

$$\mathcal{A}_0 = \sigma().$$

Note que \mathcal{A}_0 é uma cobertura de X por abertos de Y . Considere

$$\mathcal{A}_1 = \{\sigma(A) : A \in \mathcal{A}_0\}.$$

Note que, novamente, \mathcal{A}_1 é uma cobertura aberta de X feita de abertos de Y . Além disso, \mathcal{A}_1 é uma cobertura ponto-finita (aqui estamos usando que cada cobertura envolvida é ponto-finita, mais o fato que cada uma refina os elementos de uma outra cobertura ponto-finita. Fazer um desenho ajuda bem). Talvez aqui ainda não dê para enxergar qual o padrão - no próximo passo isso deve ficar mais evidente. Considere

$$\mathcal{A}_2 = \{\sigma(A_0, A_1) : A_0 \in \mathcal{A}_0 \text{ e } A_1 \in \sigma(A_0)\}.$$

Note que há uma árvore de escolhas aqui (veja a Figura 19): suponha que BETO escolhe $A_0 \in \mathcal{A}_0 = \sigma()$ na primeira rodada. Desta forma, σ irá responder com uma coleção de abertos que cobre A_0 . Tal coleção é denotada por $\sigma(A_0)$. Então, podemos chamar de \mathcal{A}_1 a escolha de BETO em $\sigma(A_0)$. Desta forma, para cada n , definimos:

$$\mathcal{A}_{n+1} = \{\sigma(A_0, \dots, A_n) : A_0 \in \sigma(), \dots, A_n \in \sigma(A_{n-1})\}.$$

Note que \mathcal{A}_{n+1} é uma cobertura aberta ponto-finita de X por abertos de Y . Para cada n , defina $G_n = \bigcup_{A \in \mathcal{A}_n} A$. Como cada G_n é um aberto de Y que contém X , para obtermos o resultado basta provarmos que $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} G_n \subset X$. Fixe $y \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} G_n$. Defina uma árvore tal que seus vértices sejam os abertos de cada \mathcal{A}_n que contenham y . Conecte vértices A e B se $A \in \mathcal{A}_n$, $B \in \mathcal{A}_{n+1}$ e $B \in \sigma(A_0, \dots, A_n)$. Note que, como cada A_n é ponto-finita, tal árvore bifurca finitamente. Além disso, tal árvore é infinita (existe pelo menos um vértice em cada \mathcal{A}_n). Assim, aplicando o Lema de König, existe um ramo infinito em tal árvore. Note que tal ramo indica uma partida do jogo em que foi utilizada a estratégia σ . Além disso, em todas as jogadas de tal partida, y pertence ao aberto selecionado por BETO. Por densidade, podemos construir uma sequência selecionando um ponto de X por aberto de cada jogada que converge para y . Pela unicidade do limite, tal sequência não converge em X , contrariando o fato que σ é vencedora. \square

⁹Talvez a notação seja meio estranha, mas ao usarmos $\sigma()$, indicamos a aplicação de σ ao “histórico de partida” vazio - ou seja, o que ALICE joga no início do jogo.

Finalmente, o resultado principal dessa seção:

Proposição 4.9. *Seja (X, d) um espaço métrico. Então existe uma métrica completa sobre X equivalente a d se, e somente se, BETO admite uma estratégia vencedora no jogo de Cauchy em (X, d) .*

Demonstração. Primeiramente, suponha que exista d' métrica completa equivalente a d . Como d e d' são equivalentes, para qualquer $r \in \mathbb{R}_{>0}$, existe $s \in \mathbb{R}_{>0}$ de forma que

$$B_s^{d'}(x) \subset B_r^d(x).$$

Assim, basta que BETO escolha $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de forma que a sequência seja de Cauchy com relação à métrica d' (veja o Exemplo 4.4).

Agora suponha que BETO possua uma estratégia vencedora. Pela Proposição 4.7, ALICE admite uma estratégia vencedora no jogo de Cauchy*. Assim, pela Proposição 4.8, X é um G_δ em seu completamento. Assim, X admite uma métrica completa equivalente a d . \square

Observações

Os jogos apresentados aqui são bastante inspirados e relacionados ao jogo de Banach-Mazur, que é considerado o primeiro jogo topológico. Para mais sobre jogos topológicos, pode-se consultar

